به نام زندگی

آزمون میان‌ترم شنبه ۹/۱۹ ساعت 7:30

استقلال پیشامدهای تصادفی Independency

مفهوم استقلال دو پیشامد

دو پیشامد A و B را مستقل از هم می‌گوییم، اگر رخداد یکی (قطعی بودن یکی) هیچ تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد. به عبارت دیگر

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B) \iff A \perp\!\!\!\perp B$$

نماد استقلال

از طرف دیگر با توجه به رابطه‌ی زنجیره‌ای، می‌دانیم که

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

$$A \perp\!\!\!\perp B \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$A \perp\!\!\!\perp B \iff P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

بنابراین از استقلال دو پیشامد A و B می توان نتیجه گیری های زیر را داشت.

نتیجه ۱: اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند احتمال اشتراک آنها برابر حاصلضرب احتمال های تک تک آنهاست یعنی (و برعکس)

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

نتیجه ۲: دو پیشامد مستقل از هم A و B با احتمال های غیرصفر، نمی توانند جدا از هم باشند

$$P(A\cap B)=\underbrace{P(A)}_{>0}\,\underbrace{P(B)}_{>0}\Rightarrow P(A\cap B)>0$$

یادآوری: دو پیشامد A و B را جدا از هم می‌گوییم هرگاه احتمال وقوع توأم آنها

برابر صفر باشد یا $A \cap B = \phi$ یا $P(A \cap B) = 0$

یا وقوع توأم آنها غیرممکن باشد.

* مفهوم استقلال دو پیشامد و مفهوم پیشامدهای جدا از هم، دو مفهوم

متفاوت هستند و نباید آنها را با هم اشتباه بگیریم.

مفهوم استقلال را می‌توانیم به هر تعداد پیشامد به صورت $A_1, A_2, \dots, A_n$ نیز تعمیم دهیم.

پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ را مستقل از هم (متواماً مستقل از هم) گوییم هرگاه هر زیرمجموعه به هر تعداد از این پیشامدها را در نظر بگیریم، مستقل از هم باشند.

به عبارت دیگر

$$\forall i_r \in \{1,2,\dots,n\} \; ; \quad P\left(\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{r} P(A_{i_j}) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\forall\, r \geq 2 \,,\; r \leq n$$

$$\Longleftrightarrow \quad A_1 \perp\!\!\!\perp A_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp A_n \qquad \text{(استقلال توأم)}$$

Jointly independent

در مورد استقلال دو پیشامد، قضیه‌های زیر نیز کمک کننده هستند

قضیه ۱: اگر پیشامدهای A, B مستقل از هم باشند آنگاه پیشامدهای A, B^c نیز مستقل از هم هستند.

$$A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c$$

اثبات: برای اثبات دو راه حل وجود دارد

راه حل اول: نشان دهیم

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

راه حل دوم: نشان دهیم

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

راه حل دوم: باید نشان دهیم

$$P(A \cap B^c) = P(A)\,P(B^c)$$

می‌دانیم که

$$A = A \cap \overbrace{(B \cup B^c)}^{\Omega} = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

$$A\cap B\,,\ A\cap B^c \text{ זרים} \Longrightarrow P(A) = P(A\cap B^c) + \underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)}$$

$$A \perp\!\!\!\perp B \xRightarrow[P(A\cap B)=P(A)P(B)]{} \quad P(A) = P(A\cap B^c) + P(A)P(B)$$

$$\Longrightarrow P(A\cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\overbrace{\left(1-P(B)\right)}^{P(B^c)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A)\,P(B^c) \Longrightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c$$

قضیه ۲ (نتیجه قضیه ۱) اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، آنگاه پیشامدهای A^c و B^c نیز مستقل از هم هستند.

$$A \perp\!\!\!\perp B \xRightarrow{\text{قضیه اول}} A \perp\!\!\!\perp B^c \xRightarrow{\text{قضیه اول}} A^c \perp\!\!\!\perp B^c$$

استفاده دوباره از قضیه اول

$$B^c \perp\!\!\!\perp A$$

تمرین : اگر داشته باشیم $A \perp\!\!\!\perp B$ و $A \perp\!\!\!\perp C$ ، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید

1) $A \perp\!\!\!\perp (B \cup C)$

2) $A \perp\!\!\!\perp (B \cap C)$

3) $A \perp\!\!\!\perp (B^c \cup C)$

4) $B \perp\!\!\!\perp C$

5) $A \perp\!\!\!\perp B \perp\!\!\!\perp C$

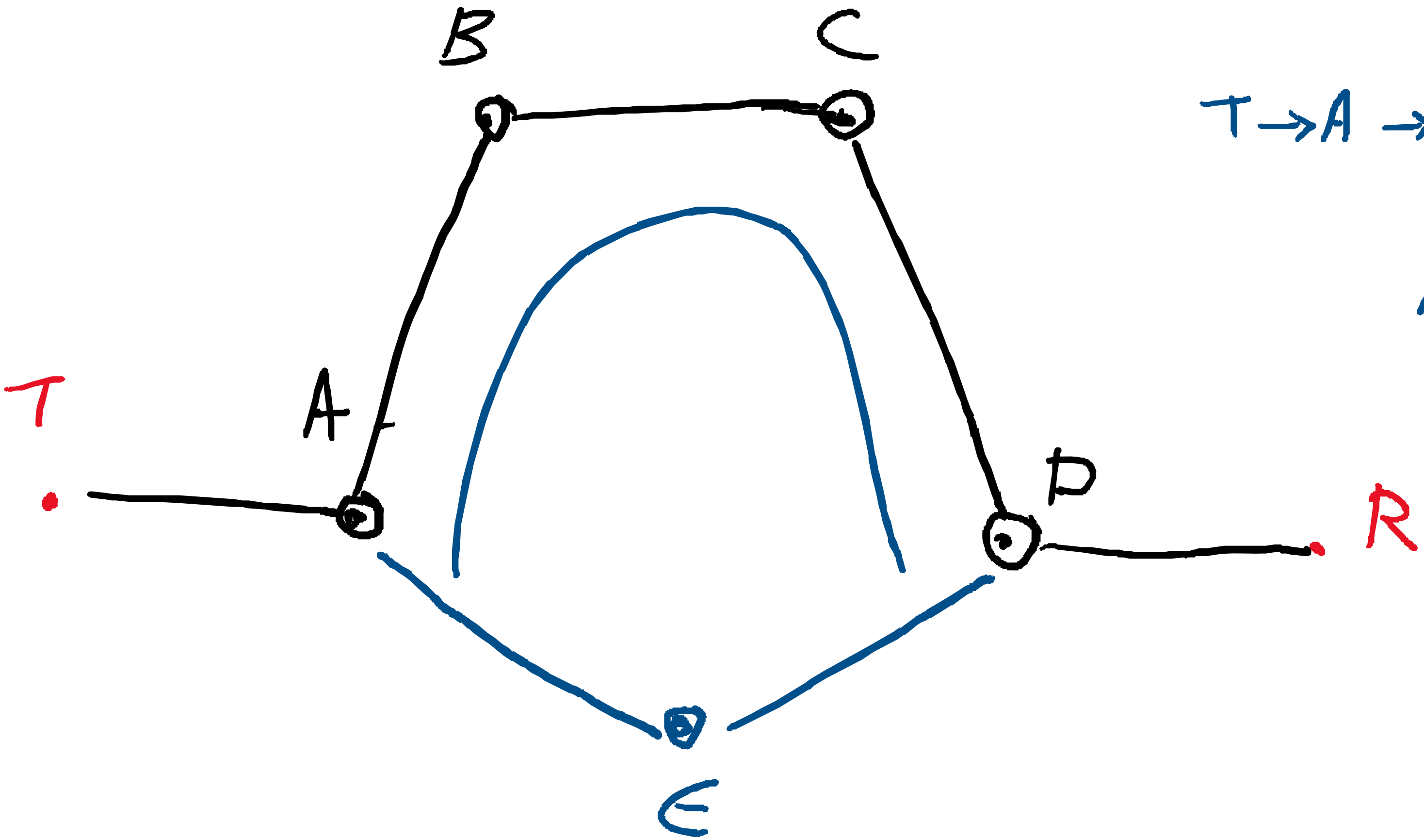
مثال : می خواهیم بین دو نقطه‌ی T و R یک ارتباط رادیویی برقرار کنیم. برای

این منظور سیگنال‌های ارسالی را

از مسیر T → A → B → C → D → R

از نقطه‌ی T به نقطه‌ی R

می رسانیم.



برای اینکه قابلیت اطمینان لینک رادیویی افزایش پیدا کند، یک مسیر stand by

به صورت $T \to A \to E \to R$ نیز برای ارسال اطلاعات در نظر می‌گیریم.

اگر احتمال سالم بودن ایستگاه رادیویی X را با P_X نمایش دهیم،

احتمال اینکه لینک بین T و R برقرار باشد، چقدر است؟

* سالم بودن یا خراب بودن ایستگاه‌های رادیویی مختلف، مستقل از هم هستند.

پارامترهای عملکردی آنها به هم وابسته نیست

برای برقراری ارتباط بین T و R ، لازم است که ایستگاه‌های A و D

سالم باشند و ($\underbrace{B \text{ و } C}_{\text{مسیر اصلی}}$ یا $\underbrace{E}_{\text{مسیر standby}}$) سالم باشند

$$\underbrace{P(L)}_{\text{احتمال برقراری لینک}} = P\{(A\cap D)\cap[(B\cap C)\cup E]\}$$

$$= P_A P_D \left(\overbrace{P(B\cap C)}^{P_B P_C} + P(E) - \overbrace{P(B\cap C\cap E)}^{P_B P_C P_E}\right)$$

$$= P_A P_D \left(P_B P_C + P_E - P_B P_C P_E\right)$$

آزمایش‌های تکراری

در بخش‌های قبل به طور خلاصه با آزمایش‌های تکراری آشنا شدیم.

به طور مثال یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. یا یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم.

در این گونه مسائل می‌دانیم که فضای نمونه و پیشامدها به چه صورت قابل

بیان هستند.

به طور مثال: اگر یک سکه را سه بار پرتاب کنیم، داریم

$$\Omega_1 = \{H, T\}$$

سه بار پرتاب $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 = \{(H, H, H), (H, H, T), \ldots, (T, T, T)\}$

$$|\Omega| = 2^3 = |\Omega_1|^3$$

در این بخش می خواهیم آزمایش های تکراری را با دقت بیشتری بررسی کنیم و مسائل
مرتبط با آن را فرمول بندی کنیم. در این راستا توجه داریم که آزمایش‌های تکراری
در شرایط یکسان و به صورت مستقل از هم (توأماً مستقل) تکرار می شوند.

بنابراین از این نکته در حل مسائل کمک می گیریم.

مطالب را با یک مثال ساده آغاز می کنیم.

مثال: یک سکه را در نظر می‌گیریم که در آن احتمال شیر آمدن برابر p است

$$P_r\{H\} = P \longrightarrow P_r\{T\} = 1-P$$

این سکه را n بار پرتاب می‌کنیم (شرایط یکسان و مستقل از هم) احتمال

پیش‌آمدهای زیر را به دست بیاورید

1- اینکه در بار اول خطر سه بار آخر شیر بیاید. (A)

2- اینکه سه بار شیر بیاید. (B) (ترتیب مهم نیست)

پنج بار پرتاب سکه

(استقلال تمام نتایج آزمایش‌های تکراری)

___ ___ ___ ___ ___

H یا T ... H یا T

امتحان سوم شیر

$$P(A) = P(T, T, H, H, H) = P(T_1 \cap T_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5)$$

امتحان اول خطا — امتحان دوم خطا — امتحان اول خطا — امتحان پنجم شیر

$$= \overbrace{P(T_1)}^{1-p}\,\overbrace{P(T_2)}^{1-p}\,\overbrace{P(H_3)}^{p}\,\overbrace{P(H_4)}^{p}\,\overbrace{P(H_5)}^{p} = (1-p)^2 p^3$$

$P(B) = P_r$ { سه بار با هر ترتیبی شیر بیاید ترتیب اهمیت ندارد }

$$= P_r \Big\{ \underbrace{(H,H,H,T,T)}_{p^3(1-p)^2} \text{ یا } \underbrace{(\overset{p}{H},\overset{1-p}{T},\overset{p}{H},\overset{1-p}{T},\overset{p}{H})}_{p^3(1-p)^2} \text{ یا } \cdots \text{ یا } \underbrace{(\overset{1-p}{T},\overset{1-p}{T},\overset{p}{H},\overset{p}{H},\overset{p}{H})}_{(1-p)^2 p^3} \Big\}$$

= تعداد حالت هایی که 3 بار شیر بیاید × احتمال یک ترتیب خاص سه بار شیر بیاید

$$= \binom{5}{3} \times p^3 (1-p)^2$$

این آزمایشها اولین بار توسط برنولی فرمول بندی شدند. از این جهت به آزمایشهای تکراری، آزمایشهای برنولی نیز گفته می‌شود.

* آزمایش های برنولی Bernolli Trials

آزمایش های برنولی برای مدل سازی تکرار مستقل از هم آزمایش های تصادفی در شرایط یکسان که نتیجه‌ی آنها تنها یکی از دو حالت است، استفاده می‌شود.

به عنوان مثال، پرتاب سکه، خاموش کردن یا روشن کردن یک کلید در یک مدار الکتریکی یا

مثبت یا منفی بودن یک عدد غیرصفر ...

در حالت کلی آزمایش های برنولی را می توان برای مدل سازی رخداد یک پیشامد مورد نظر A با احتمال p یا رخ ندادن آن (با احتمال $1-p$) یا A^c نیز به کار برد.

$P(A) =$ احتمال پیشامد مورد نظر $= p$

اگر آزمایش برنولی را n بار تکرار کنیم. (تکرار مستقل و در شرایط یکسان)

احتمال اینکه پیش آمد مورد نظر با یک ترتیب مشخص ، k بار رخ دهد ، برابر است با

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

احتمال اینکه پیش آمد مورد نظر k بار رخ دهد (با هر ترتیبی ، ترتیب مهم نیست)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \triangleq P_n(k)$$

همان طور که می دانیم $P_n(k)$ عناصر بسط دوجمله‌ای زیر هستند

$$\big(\underbrace{p+(1-p)}_{1}\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

که با اصول احتمال نیز همخوانی دارد.

مثال ۱- یک جعبه حاوی N ترانزیستور داریم که M تای آنها خراب است ($M \leq N$) آزمایش تصادفی را به این صورت در نظر گیریم که یک ترانزیستور به صورت تصادفی از این جعبه انتخاب می‌کنیم، آن را تست می‌کنیم که آیا سالم است یا خیر و نتیجه را یادداشت می‌کنیم. این آزمایش را n بار تکرار کنیم.

احتمال اینکه k ترانزیستور از n ترانزیستور انتخاب شده، خراب باشند، چقدر است؟

(پیش‌آمد B)

پیش آمد مورد نظر = خراب بودن ترانزیستور

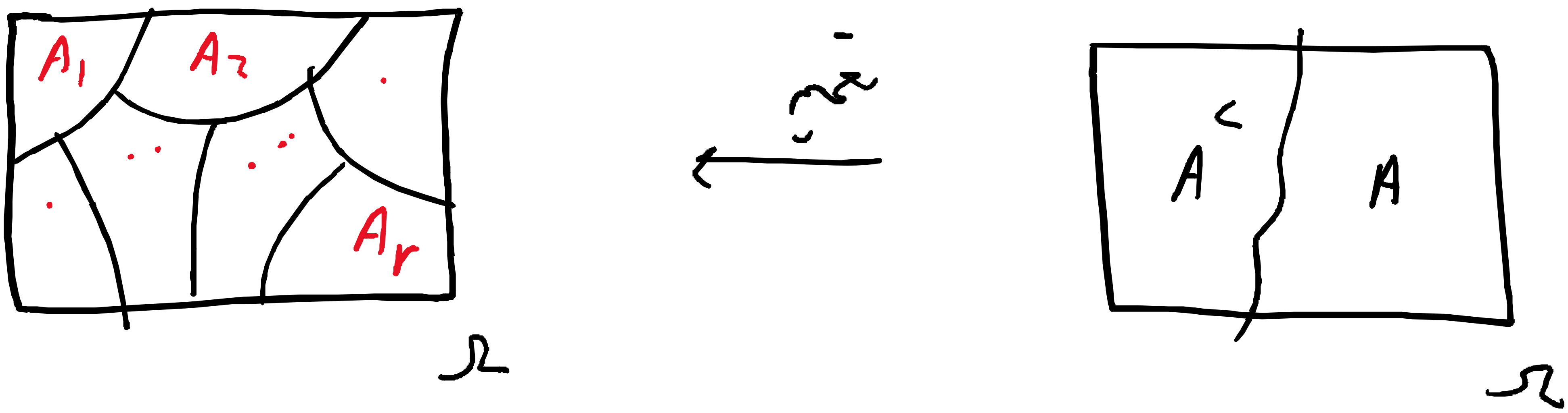
$$\Rightarrow \quad P = \frac{M}{N} \quad , \quad 1-P = 1 - \frac{M}{N}$$

$$P(B) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \equiv P_n(k)$$

$$= \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

آزمایش برنولی را می‌توان به حالتی که نتایج آزمایش، بیشتر از دو حالت داشته باشند نیز تعمیم داد.

تعمیم آزمایش برنولی



اگر آزمایش تصادفی که نتایج آن دارای حالت‌های A_1 و A_2 و ... و A_r با

احتمال‌های p_1 و p_2 و ... و p_r هستند را به طور مستقل و در شرایط یکسان،

n بار تکرار کنیم و بخواهیم که پیش آمد A_i به تعداد k_i بار با به ترتیب

مشخص رخ بدهد، احتمال این پیش آمد برابر است با

$$\prod_{j=1}^{r} p_j^{k_j} = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \quad , \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{r} k_j = n \\ \sum_{j=1}^{r} p_j = 1 \end{cases}$$

احتمال اینکه پیش آمد A_i به تعداد k_i بار با هر ترتیبی رخ دهد (ترتیب مهم نیست)

برابر است با

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r} \quad , \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{r} k_j = n \\ \sum_{j=1}^{r} P_j = 1 \end{cases}$$

یا

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} \prod_{j=1}^{r} P_j^{k_j}$$

مثال : در یک جعبه 50 گوی داریم که روی آنها اعداد 1 تا 3 نوشته شده است
اگر بدانیم بر روی 20 گوی عدد 1 و بر روی 18 گوی عدد 2 و بر روی
12 گوی عدد 3 نوشته شده است و آزمایش تصادفی ، انتخاب تصادفی یک گوی
و ثبت کردن عدد نوشته شده روی آن باشد. آزمایش را 5 بار تکرار می‌کنیم.
احتمال پیش آمدهای زیر را حساب کنید.

$$P_1 = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$P_2 = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$$

$$P_3 = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

۱- اینکه اعداد ثبت شده به صورت $(1, 1, 2, 3, 2)$ باشند (A)

$$P_1 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_2$$

$$P(A) = P_1^2 P_2^2 P_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{9}{25}\right)^2 \left(\frac{6}{25}\right)$$

۲- اینکه 2 بار عدد 1، 2 بار، عدد 2 و یک بار عدد 3 ظاهر شود (B)

$$P(B) = \binom{5}{2,2,1} P_1^2 P_2^2 P_3 = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{9}{25}\right)^2 \left(\frac{6}{25}\right)$$